Equazioni algebriche

Le equazioni sono uno strumento basilare della modellizzazione matematica.

La risoluzione di un'equazione si articola in tre fasi principali:

1) ESISTENZA della soluzione

2) UNICITA'

3) CALCOLO $\begin{cases} \text{ESATTO} \\ \text{APPROSSIMATO} \end{cases}$

In genere si affronta lo studio di soluzioni approssimate quando non si è in grado di calcolare la soluzione esatta.
In questo capitolo tratteremo le equazioni algebriche, facendo riferimento solo ai problemi di esistenza e di calcolo esatto delle soluzioni.

Equazioni di primo grado

Consideriamo l'equazione lineare

(1) $$ax + b = 0$$

con $a, b \in IR, \quad a \neq 0$.
Come è noto, **essa ammette una unica soluzione** (reale)

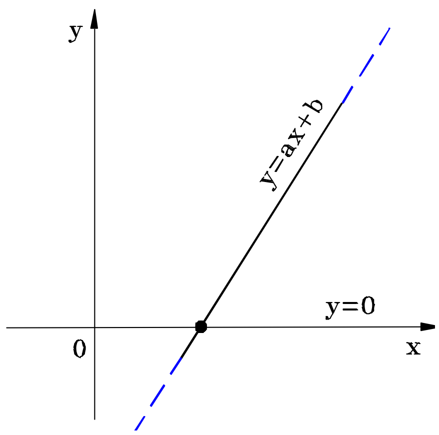
$$x = -\frac{b}{a}$$

che geometricamente rappresenta l'ascissa del punto di intersezione della retta

$$y = ax + b$$

con l'asse delle ascisse

$$y = 0$$

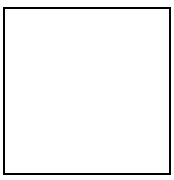


Per la modellizzazione di numerosi fenomeni governati da equazioni di primo grado si rimanda agli esercizi.

Equazioni di secondo grado nel campo reale

Equazione binomia

Iniziamo con un problema elementare: determinare il lato di un quadrato di area assegnata



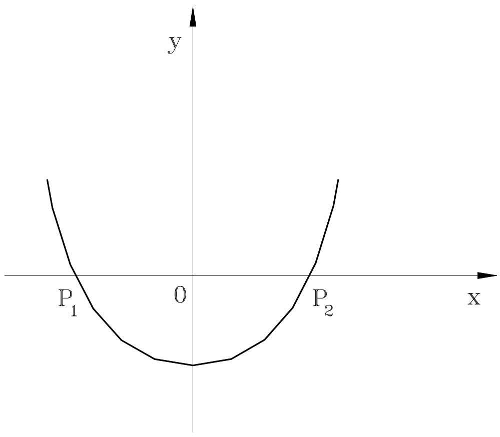
Posto c la misura della superficie del quadrato e x la misura del lato, il problema si traduce nell'equazione di II grado binomia

(2) $$x^2 - c = 0$$

La parabola di equazione

$$y = x^2 - c$$

interseca l'asse delle ascisse in due punti P_1, P_2, simmetrici rispetto l'asse delle ordinate.



Le ascisse dei punti P_1, P_2, sono le soluzioni dell'equazione (2), ovvero **l'equazione (2) ammette due soluzioni.**

$$S = \{x \in IR : \quad x^2 - c = 0\} = \{-\sqrt{c}, \sqrt{c}\}.$$

Caso degenere c = 0

In questo caso la parabola ha vertice nell'origine ed è tangente all'asse x.
Le soluzioni sono coincidenti e nulle.

Equazione completa

Sia assegnata l'equazione completa

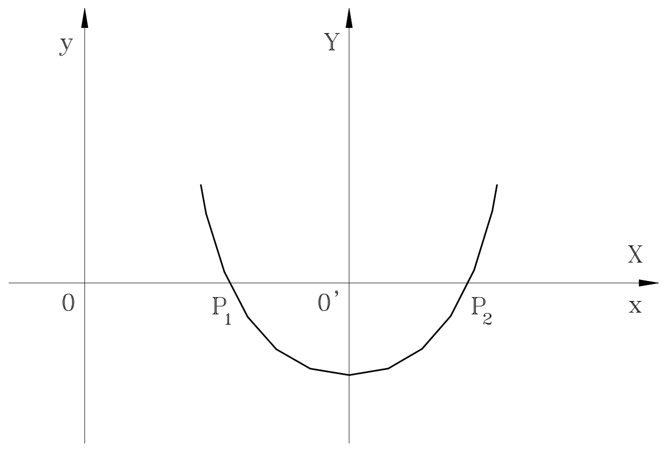
(3) $$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a, b, c \in IR$, $a \neq 0$ (senza restrizione di generalità supporremo $a > 0$).

La curva di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

è una parabola con asse verticale.



Volendo ricondurre l'equazione (3) ad una opportuna equazione binomia, operiamo un cambio di sistema di riferimento.
Precisamente individuiamo un nuovo sistema di riferimento $O'XY$ in modo che la parabola mantenga asse verticale, ma abbia vertice sull'asse delle ordinate.
Tale sistema è ottenuto mediante una traslazione lungo l'asse x.

Posto pertanto

(4) $$x = X + h$$

(con h costante da determinare) risulta

$$a(X+h)^2 + b(X+h) + c = 0$$

$$aX^2 + 2ahX + bX + ah^2 + bh + c = 0$$

(5) $$X^2 + X\left(\frac{2ah+b}{a}\right) + \frac{ah^2bh+c}{a} = 0$$

Quindi per

$$h = -\frac{b}{2a}$$

la (5) si riduce alla equazione binomia

(6) $$X^2 = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

In virtù di quanto visto nel caso dell'equazione binomia, l'equazione (6) ammette soluzioni reali se

(7) $$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$$

da cui, essendo $4a^2 > 0$, deve risultare

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

Posto $\Delta = b^2 - 4ac$, l'equazione (6) ha come soluzioni

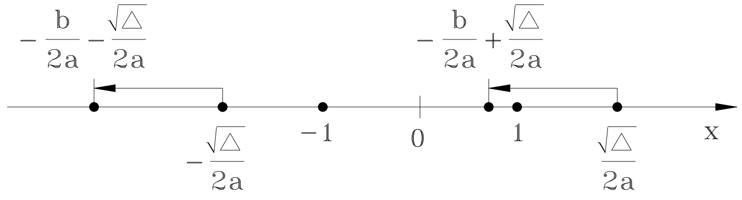
$$X_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Di conseguenza l'equazione (3) **ammette come soluzioni**

(8) $$x_{1,2} = h + X_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

La (8) è la nota formula risolutiva delle equazioni di II grado nel caso di soluzioni reali. L'addendo $-\frac{b}{2a}$ evidenzia il contributo della traslazione, mentre gli addendi $\pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ sono le soluzioni dell'equazione binomia associata.

a) Rappresentazione delle soluzioni reali



b) Alcune proprietà elementari delle soluzioni

Somma delle soluzioni

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} + \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\frac{b}{a}$$

Punto medio o semi-somma delle soluzioni

$$\sigma = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Prodotto delle soluzioni

$$p = x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a^2} - \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Riassumendo la somma s, il punto medio σ e il prodotto p delle soluzioni reali di una equazione di II grado si possono esprimere in funzione dei coefficienti a, b, c dell’equazione attraverso le stime a priori

$$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

(9) $$\sigma = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

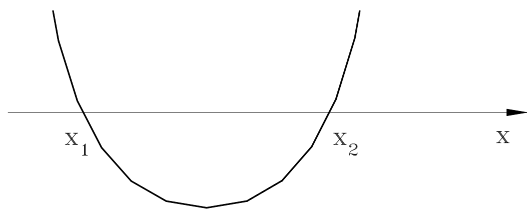
c) Confronto con lo zero o regola dei segni di cartesio

A partire dal segno dei coefficienti a, b, c, si può determinare il segno di s e p e quindi dedurre il segno delle soluzioni x_1, x_2.
Così, ad esempio, supposti a, b, c positivi, si deduce $p > 0$ e $s < 0$ e quindi le soluzioni x_1, x_2 sono di segno concorde negativo.

Approfondimento Ricavare la regola dei segni di Cartesio.

d) Confronto con un numero assegnato

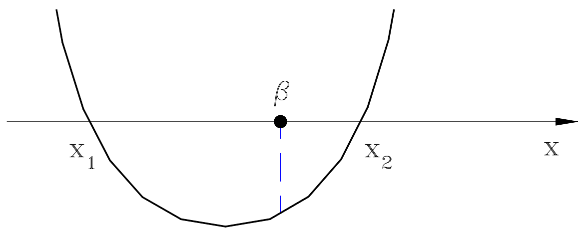
Si tracci in un piano cartesiano ortogonale la parabola $p(x) = ax^2 + bx + c$.



Assegnato un numero β si calcoli $p(\beta)$.

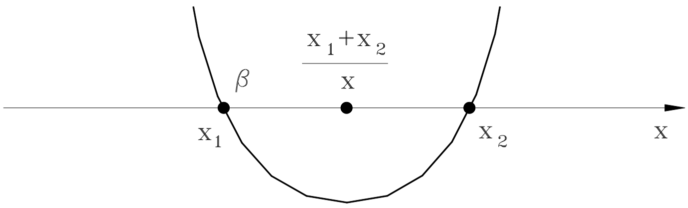
- Se $p(\beta)<0$ allora **β è compreso fra** x_1, x_2**,** cioè

$$x_1 < \beta < x_2$$

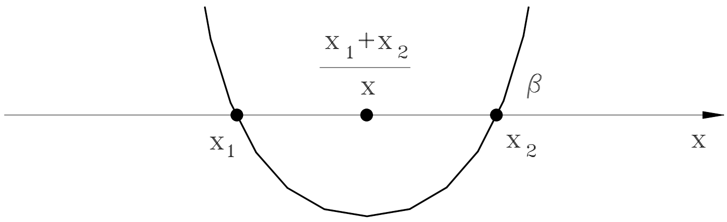


- Se p(β) = 0 allora **β coincide con una delle soluzioni.** In particolare

  - Se $\beta < \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$ allora **β coincide con** x_1

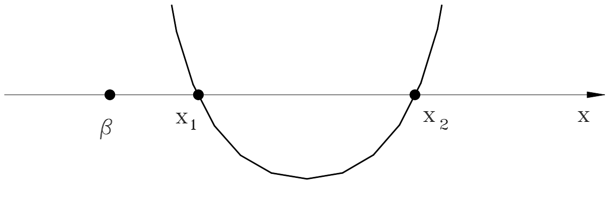


  - Se $\beta > \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, allora **β coincide con** x_2

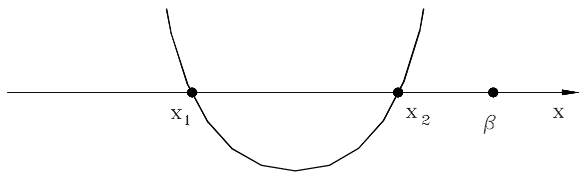


- Se p(β) > 0 allora **β è esterno all'intervallo** $[x_1, x_2]$

  - Se $\beta < \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, allora **entrambe le soluzioni seguono β**



- Se $\beta > -\frac{b}{2a}$, allora **entrambe le soluzioni precedono β**



e) Numero delle soluzioni in un assegnato intervallo o metodo[1] di Tartenville

Siano β_1 e β_2 due numeri assegnati con $\beta_1 < \beta_2$
Si tratta di stabilire se le soluzioni sono comprese nell'intervallo $[\beta_1, \beta_2]$.
Si procede come nel punto d) confrontando le soluzioni sia con β_1 che con β_2

Commento storico. Tavolette Babilonesi che risalgono a 2500 o forse a più di 3000 anni a.C. attestano la conoscenza, presso quei popoli, di un processo per la risoluzione dei sistemi di equazioni di II grado a due incognite.

Verso il 300 a.C. ad Alessandria vede la luce un'opera di esposizione e di sistemazione della geometria e di tutta la matematica antica che ci è stata tramandata come: gli "Elementi" di Euclide.
Il I libro contiene il Teorema di Pitagora; il libro II insegna *l'algebra geometrica*, conducendo fino alla risoluzione – sotto forma geometrica costruttiva – delle più semplici equazioni di II grado; la teoria è poi completata nel libro VI.

[1] Il metodo è stato esteso da STURM per le equazioni algebriche di grado superiore.

Equazioni di secondo grado non risolubili nel campo reale

Il primo esempio di equazione di II grado che non ammette soluzioni reali fu fornito da G. Cardano, nel trattato Ars Magna (1545).

Precisamente egli si pose il seguente problema:

trovare due numeri x_1, x_2 *la cui somma s sia 10 e il prodotto p sia 40.*

Tali numeri, se esistono, sono le soluzioni dell'equazione

(10) $$x^2 - 10x + 40 = 0.$$

Trasformata in forma binomia (posto $x = X + 5$), diventa

$$(X + 5)^2 - 10(X + 5) + 40 = 0 \qquad X^2 + 25 + 10X - 10X - 50 + 40 = 0$$

(11) $$X^2 + 15 = 0$$

L'equazione (11) non ha soluzioni nel campo reale, in quanto

$$X^2 \geq 0 \quad \forall X \in IR \qquad \Rightarrow \qquad X^2 + 15 > 0 \quad \forall X \in IR.$$

Cardano propose come soluzioni formali del problema i due "simboli"

$$X_1 = 5 - \sqrt{-15}, \quad X_2 = 5 + \sqrt{-15}.$$

Sorge pertanto l'esigenza di "costruire" un ampliamento del campo reale che contenga le soluzioni dell'equazione (11).
L'ampliamento di IR, necessario per trattare queste equazioni, è rappresentato dal **Campo dei numeri Complessi** usualmente denotato con **C**.