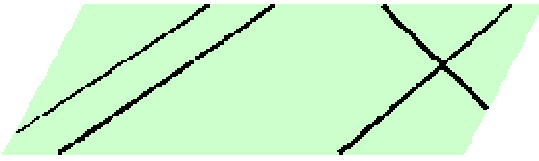


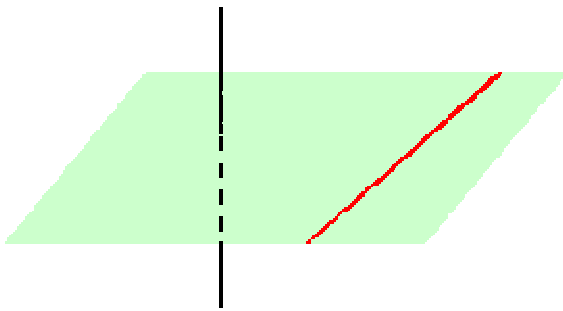
PREREQUISITI

- Rette e piani (parallelismo, perpendicolarità, incidenza)
- Proiezioni ortogonali
- Componenti
- Direzione
- Seno, coseno e tangente
- Glossario**



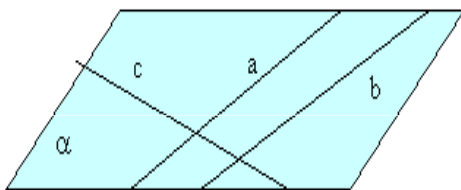
RETTE COMPLANARI

DEFINIZIONE 1: due rette sono complanari se appartengono allo stesso piano.



RETTE SGHEMBE

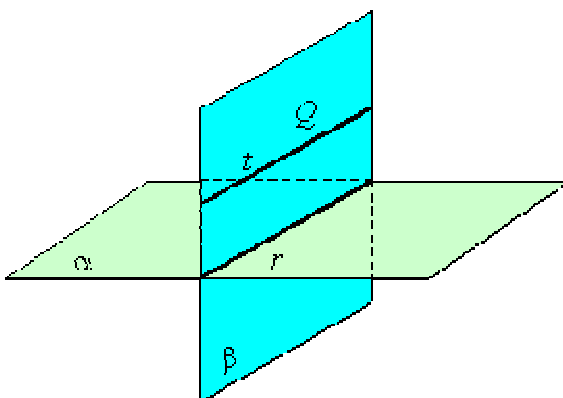
DEFINIZIONE 2: due rette sono sghembe se non hanno punti in comune e se non esiste alcun piano che le contiene entrambe.



$a \parallel b$
 c incidente ad a e b

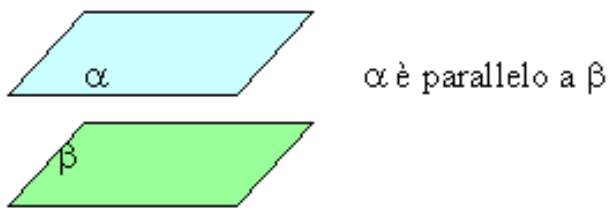
RETTE PARALLELE ed INCIDENTI

DEFINIZIONE 3: due rette nello spazio si dicono **parallele** se sono coincidenti oppure se sono complanari e non hanno punti di intersezione. Due rette si dicono **incidenti** se hanno un solo punto in comune.



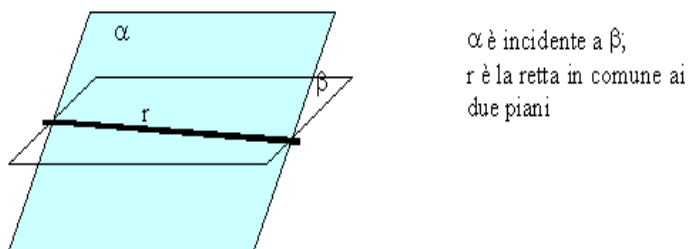
RETTE PARALLELE AD UN PIANO

DEFINIZIONE 4: una retta si dice parallela ad un piano se non ha alcun punto in comune con esso oppure se appartiene al piano. Altrimenti retta e piano si dicono incidenti e hanno un solo punto in comune.



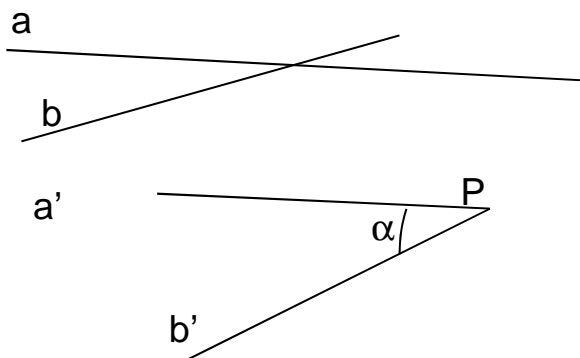
PIANI PARALLELI

DEFINIZIONE 5: due piani sono paralleli se non hanno punti di intersezione o se coincidono. Altrimenti i piani si dicono incidenti e hanno una sola retta in comune.

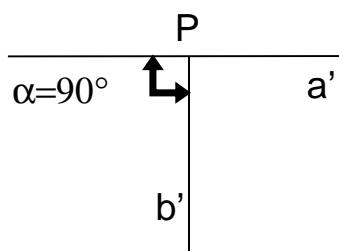


PIANI INCIDENTI

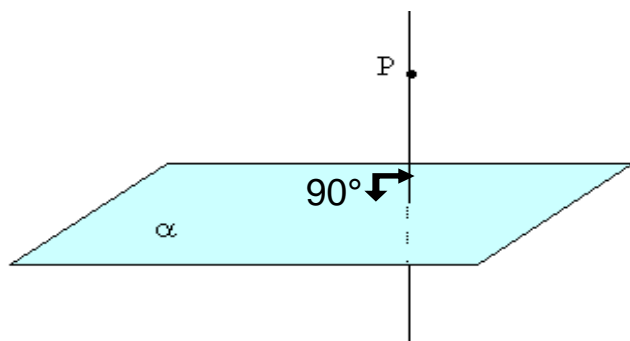
DEFINIZIONE 6: due piani sono incidenti se hanno una sola retta in comune.



DEFINIZIONE 7: Chiameremo angolo fra due rette a e b , l'angolo determinato da due rette a' e b' , uscenti da uno stesso punto P , tale che a' sia parallela ad a e b' parallela a b .



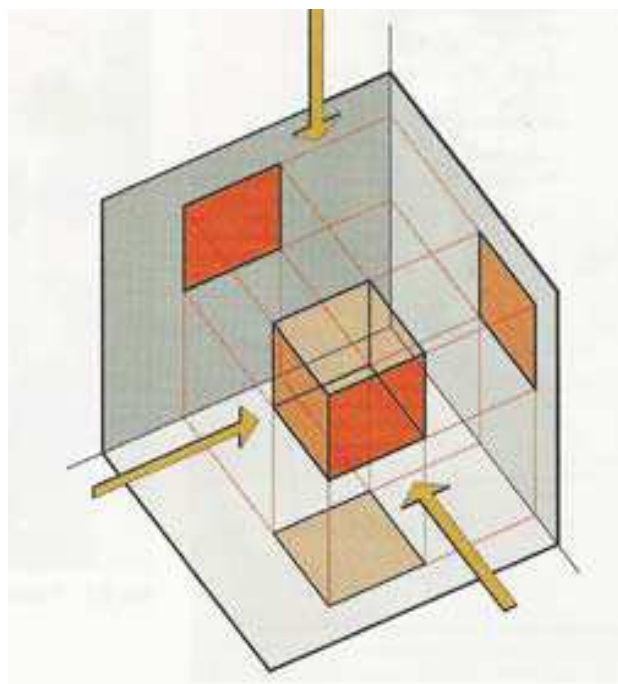
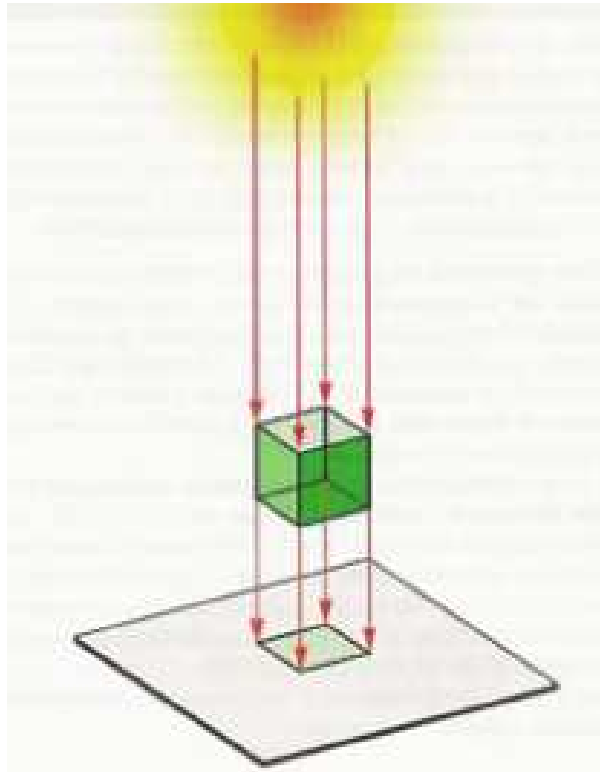
RETTE PERPENDICOLARI o ORTOGONALI: due rette incidenti si dicono perpendicolari se l'angolo α tra di loro è pari a 90° .



TEOREMA : Dato un punto P e un piano α esiste una ed una sola retta passante per P e perpendicolare ad un piano α (cioè forma con esso un angolo di 90°).

IL METODO DELLE **PROIEZIONI ORTOGONALI**:

È un metodo di proiezione caratterizzato dalla proprietà che i raggi proiettanti sono tutti perpendicolari al piano di proiezione

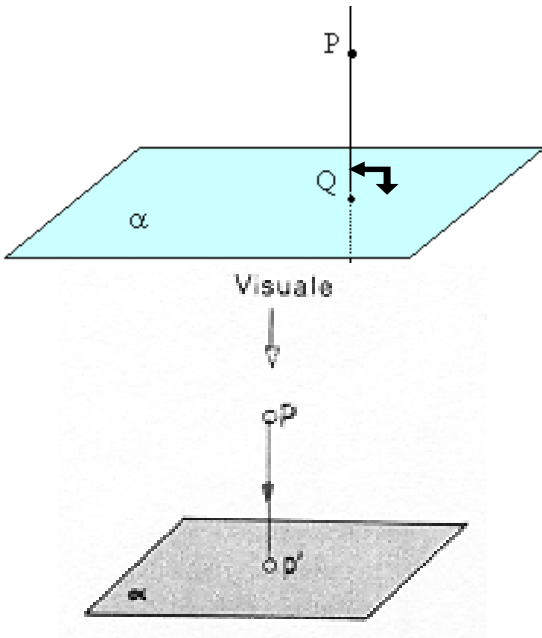


PROIEZIONE ORTOGONALE

Dati un piano α ed un punto P al di fuori di esso, si dice:

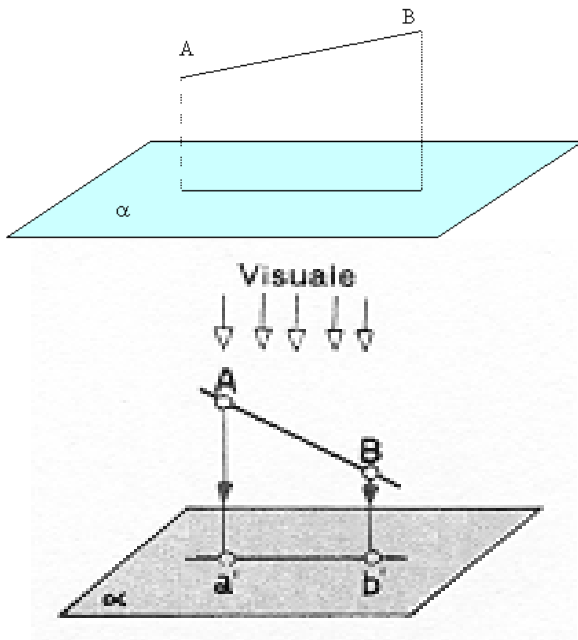
PROIEZIONE ORTOGONALE DI P SU α

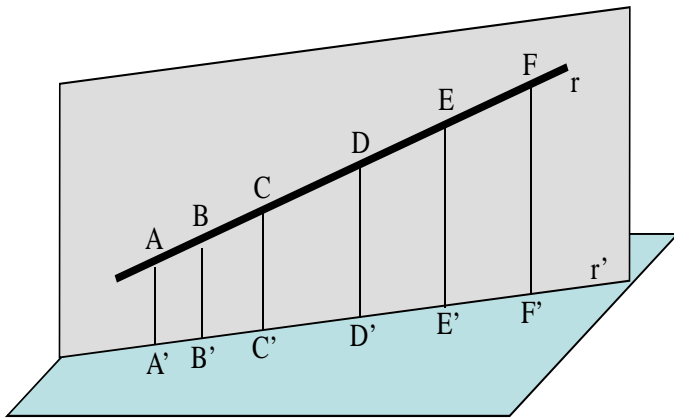
il piede della perpendicolare condotta da P al piano.



LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI UN SEGMENTO AB

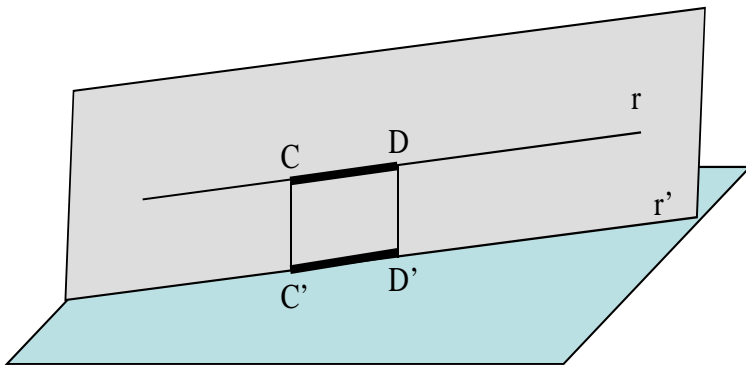
La proiezione ortogonale di un segmento AB sul piano α si intende il segmento che unisce, su detto piano, gli estremi $a'b'$ del segmento stesso. La lunghezza della proiezione sarà uguale a quella del segmento solo quando AB è parallelo al piano proiettante





**LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI
UNA RETTA r SU UN PIANO α**

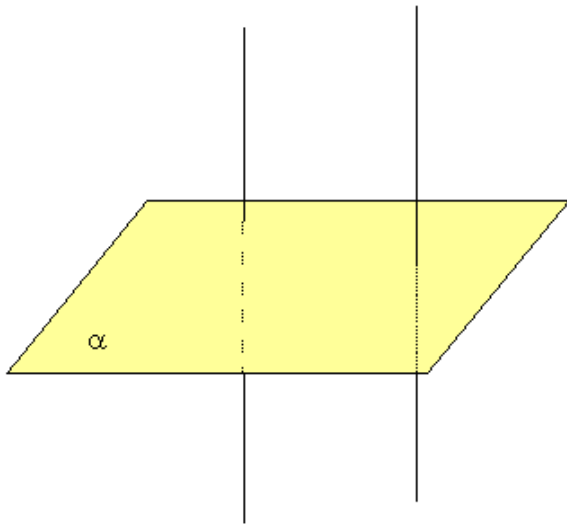
La proiezione ortogonale di una retta r su un piano è la retta r' che passa per i punti proiezione di due qualsiasi punti di r .



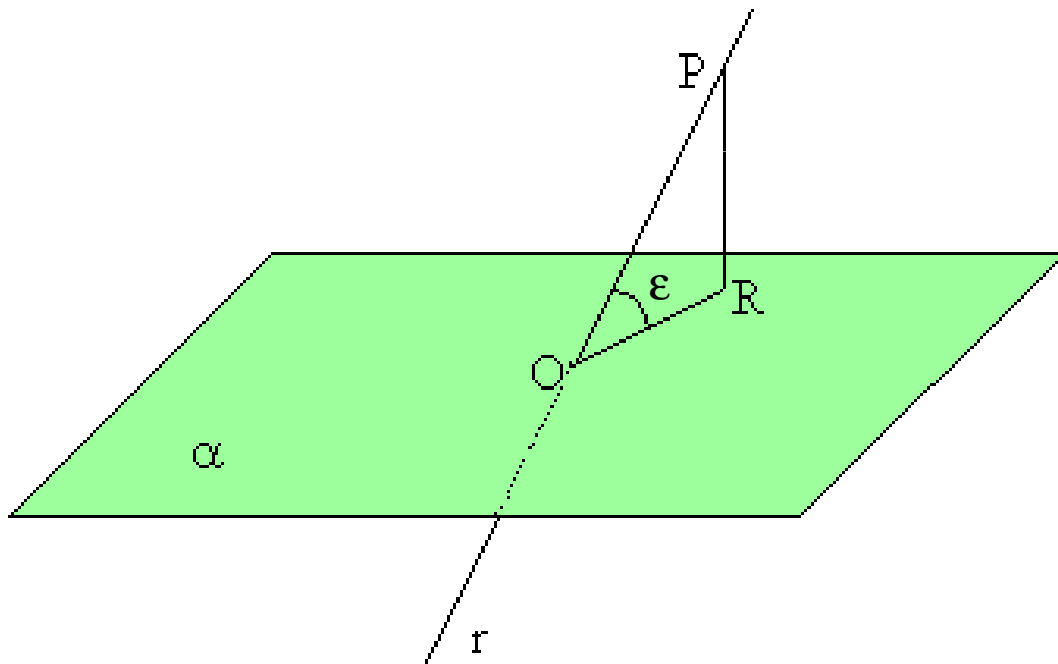
La proiezione ortogonale di un segmento CD su una retta ad esso parallela mantiene la stessa lunghezza:

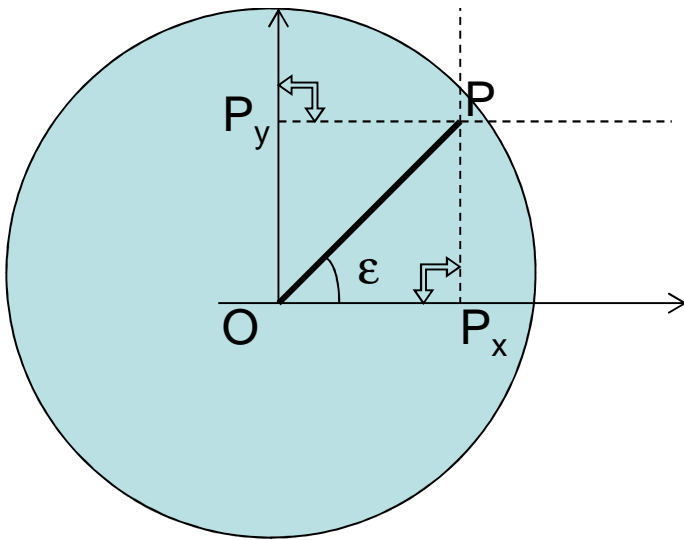
$$CD = C'D'$$

Due rette a e b perpendicolari ad uno stesso piano α sono parallele tra loro.



DEFINIZIONE 8: Si chiama angolo tra una retta e un piano l'angolo formato dalla retta e dalla sua proiezione ortogonale sul piano.



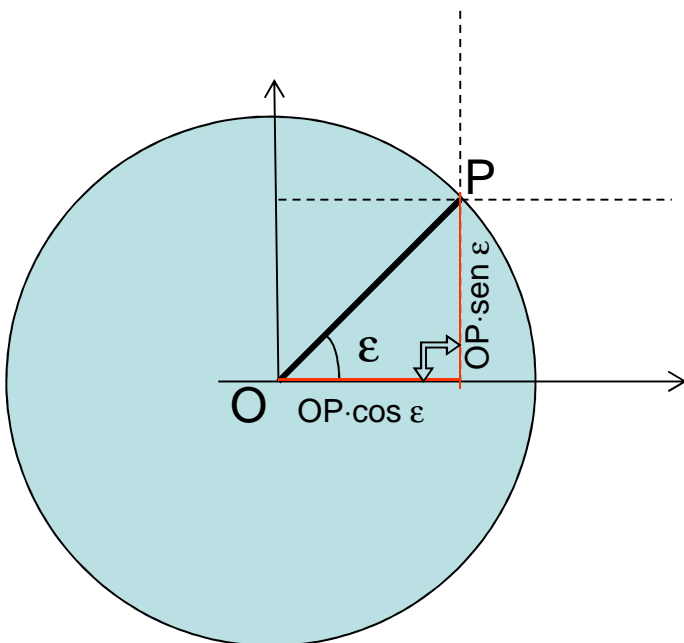


Dato un **triangolo rettangolo** OPP_x si definiscono per l'angolo ε il seno (*sen*) e coseno (*cos*)

$$\cos \varepsilon = \frac{OP_x}{OP}$$

$$\text{sen} \varepsilon = \frac{OP_y}{OP}$$

$$\tan \varepsilon = \frac{OP_y}{OP_x} = \frac{OP \cdot \text{sen} \varepsilon}{OP \cdot \cos \varepsilon} = \frac{\text{sen} \varepsilon}{\cos \varepsilon}$$



La proiezione ortogonale (o componente) di OP lungo la direzione orizzontale x è

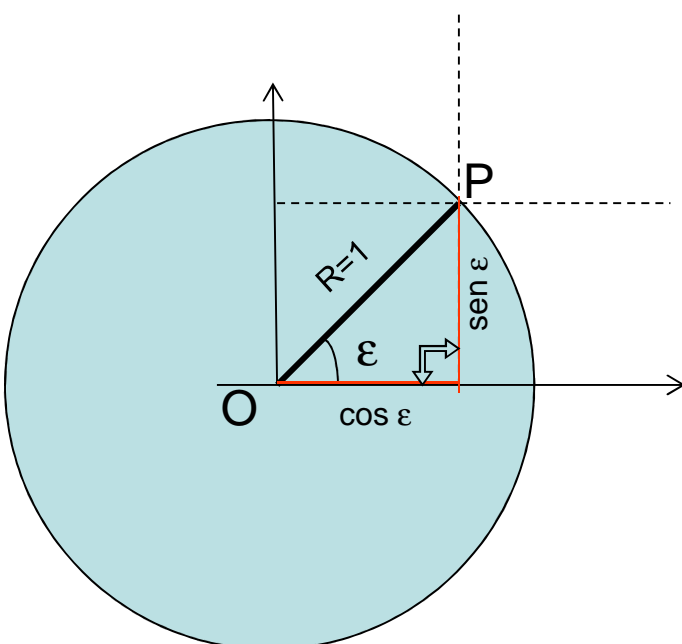
$$\mathbf{OP_x = OP \cos \varepsilon}$$

La proiezione ortogonale (o componente) di OP lungo la direzione verticale y è

$$\mathbf{OP_y = OP \text{sen} \varepsilon}$$

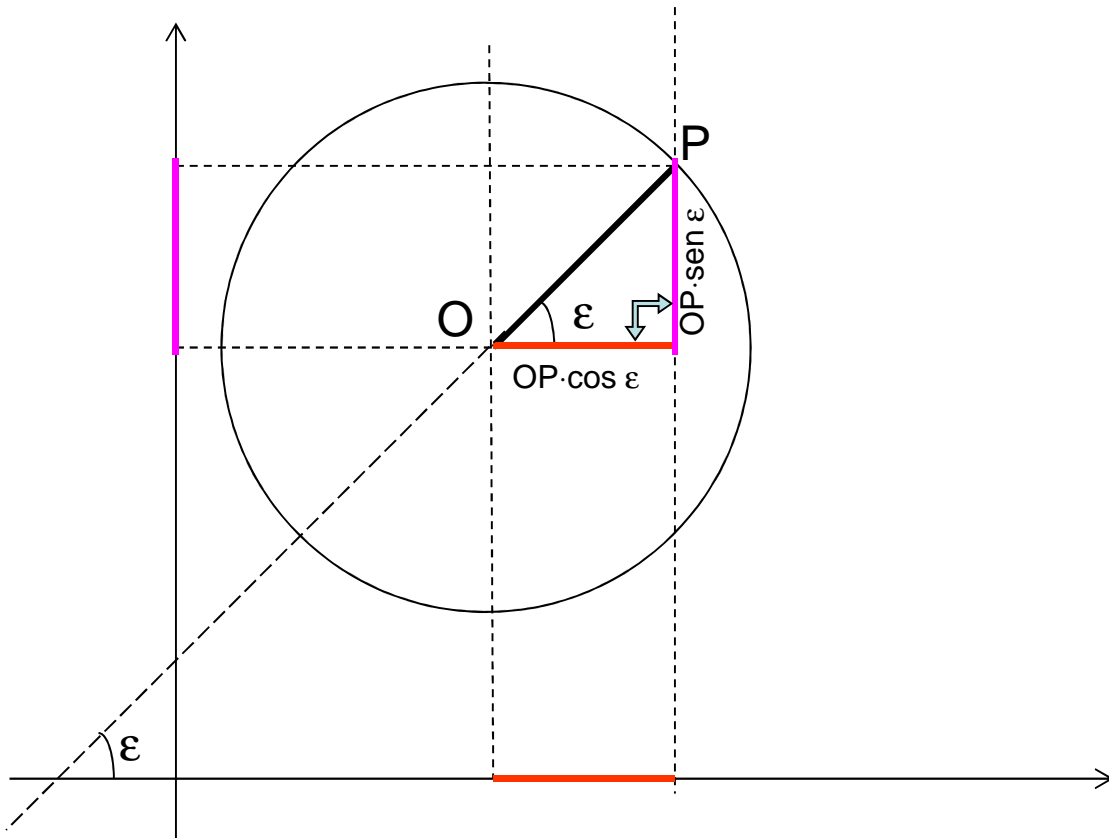
Note le componenti di un segmento è possibile trovare la sua direzione individuata dall'angolo ε che la retta su cui agisce il segmento forma con la direzione orizzontale

$$\varepsilon = \tan^{-1} \left(\frac{OP_y}{OP_x} \right)$$



Per il teorema di Pitagora inoltre il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti

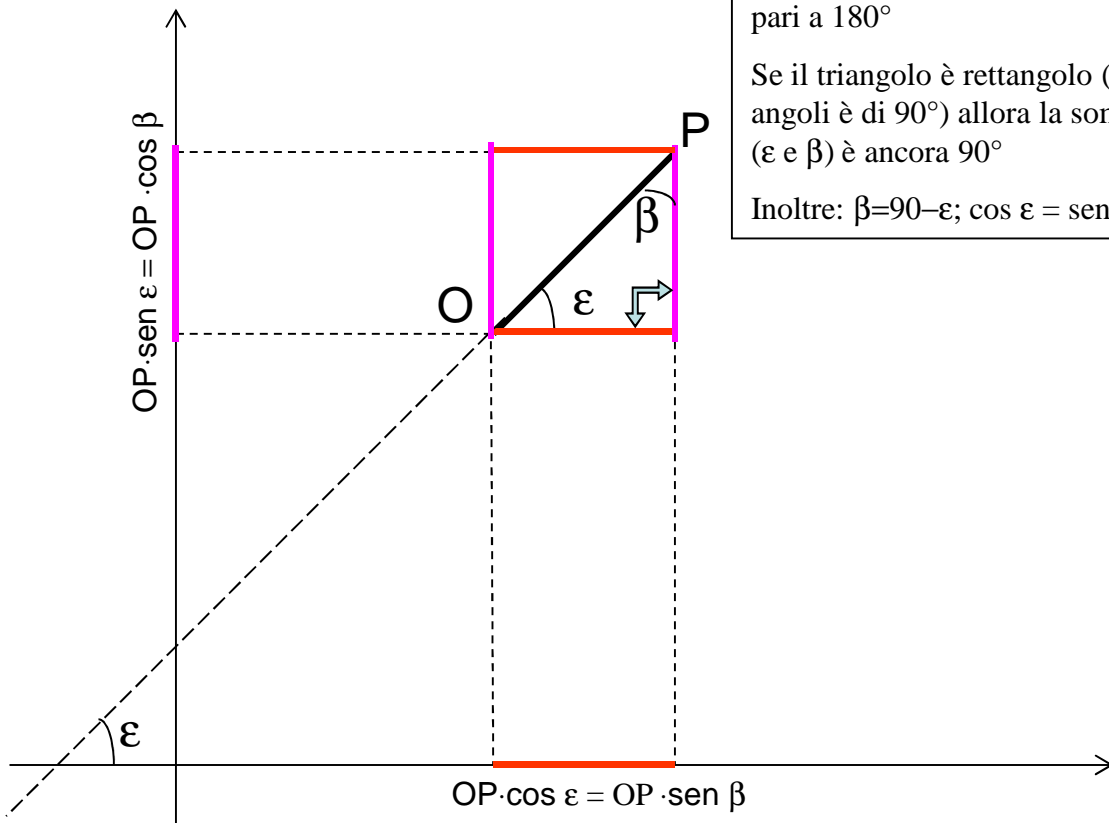
$$OP = \sqrt{OP_x^2 + OP_y^2}$$



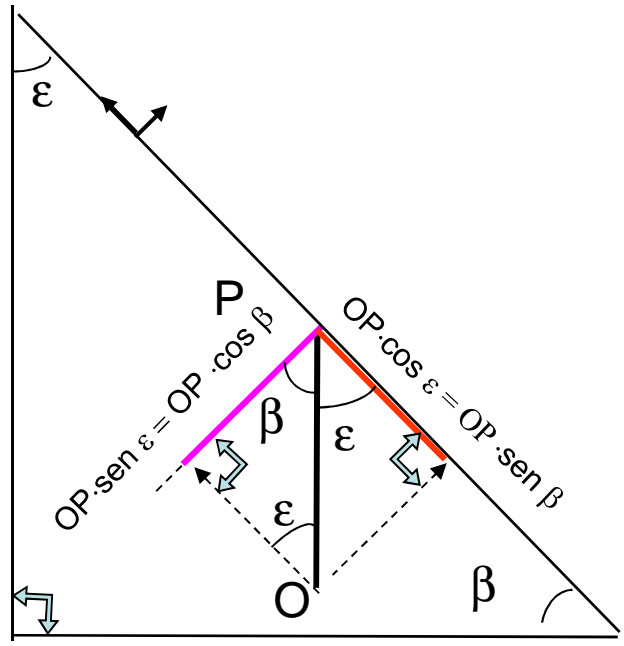
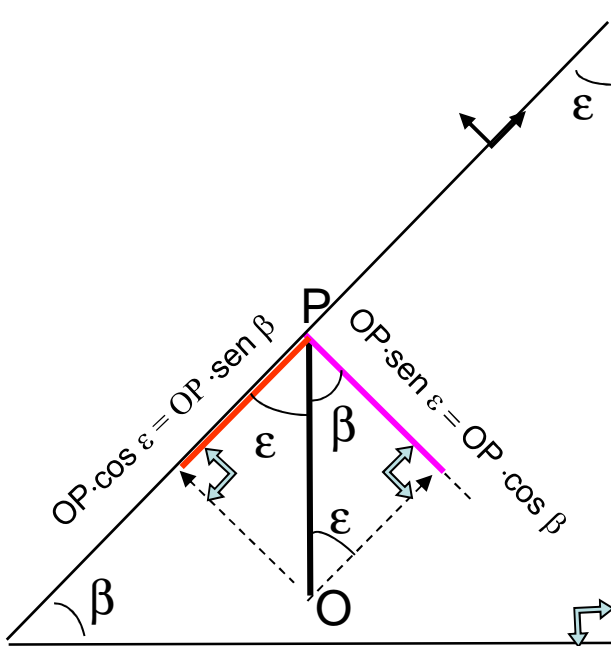
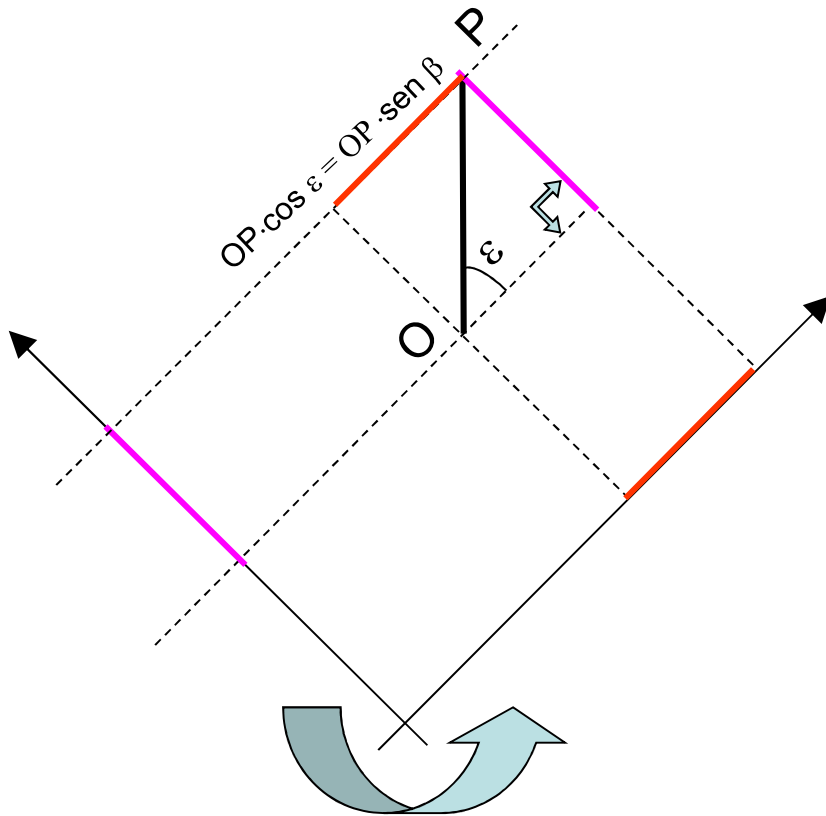
In un triangolo la somma degli angoli interni è pari a 180°

Se il triangolo è rettangolo (cioè uno degli angoli è di 90°) allora la somma degli altri due (ϵ e β) è ancora 90°

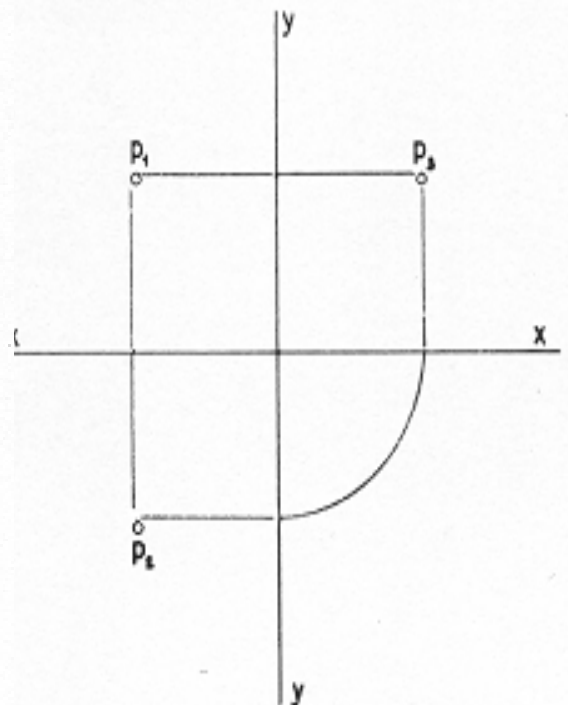
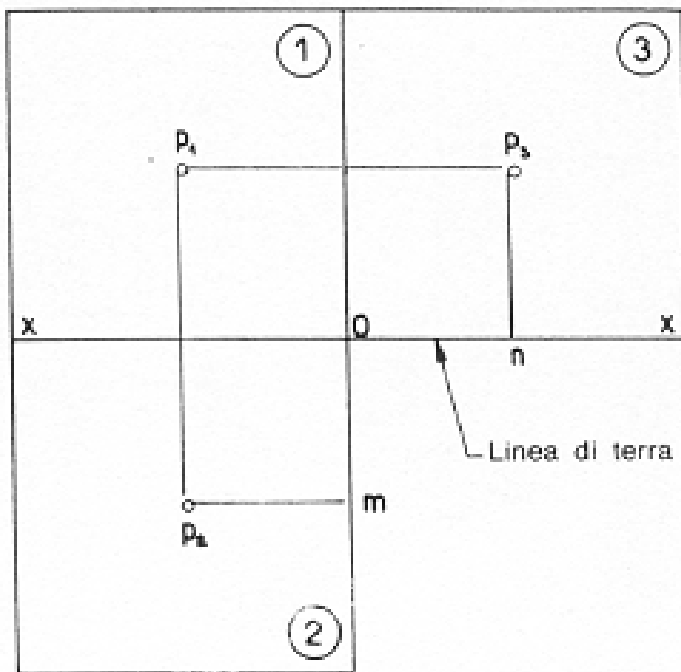
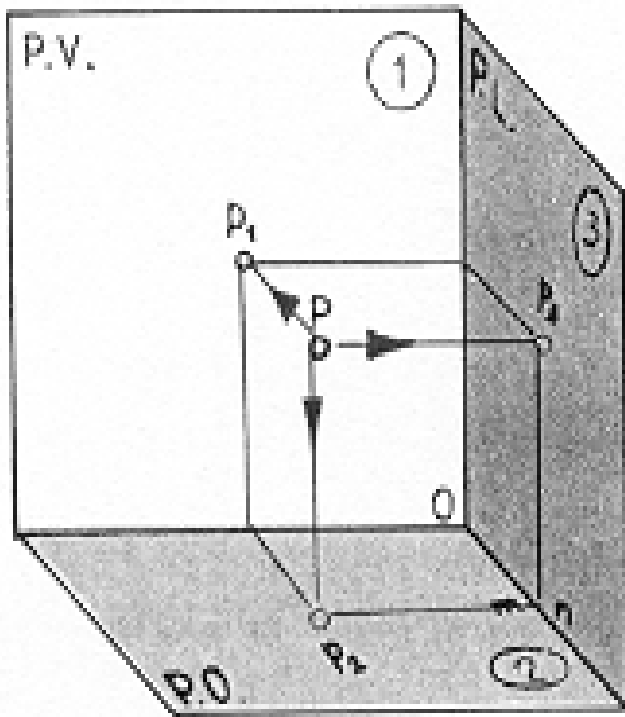
Inoltre: $\beta=90-\epsilon$; $\cos \epsilon = \text{sen } \beta$; $\cos \beta = \text{sen } \epsilon$



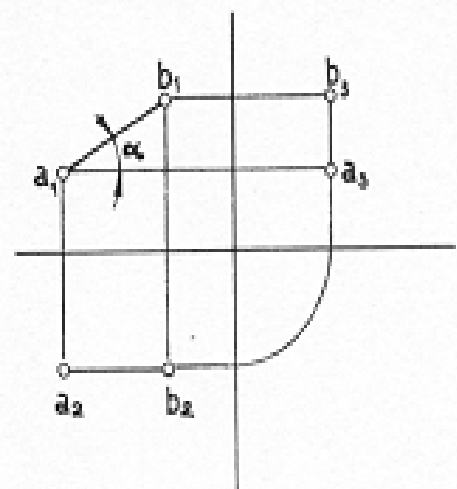
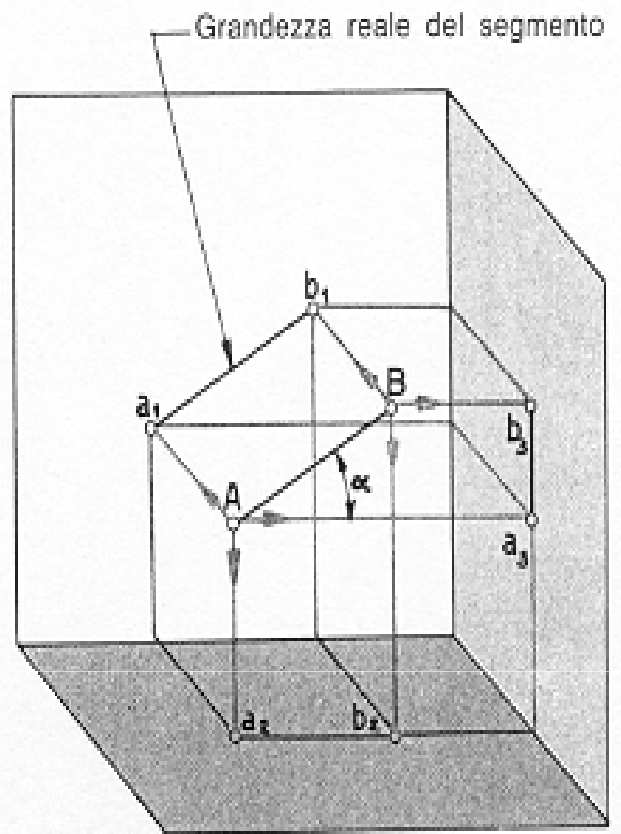
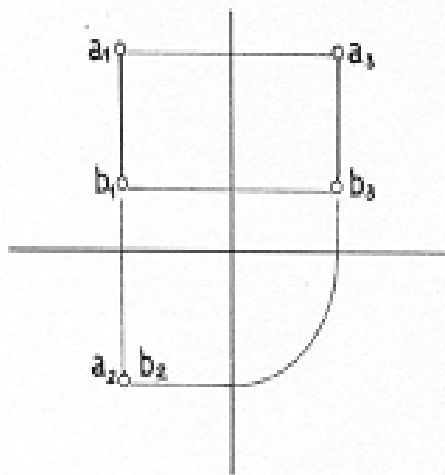
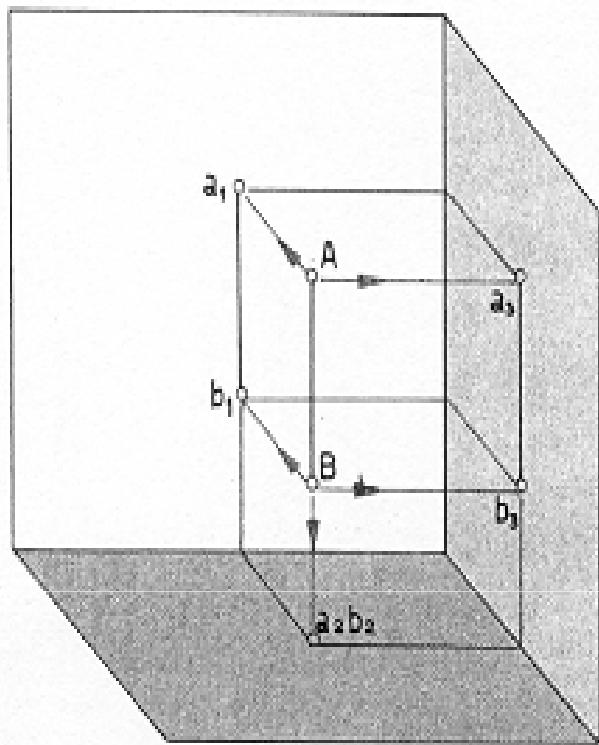
COMPONENTI ovvero PROIEZIONI DI UN SEGMENTO LUNGO LE UNA O PIU' DIREZIONI

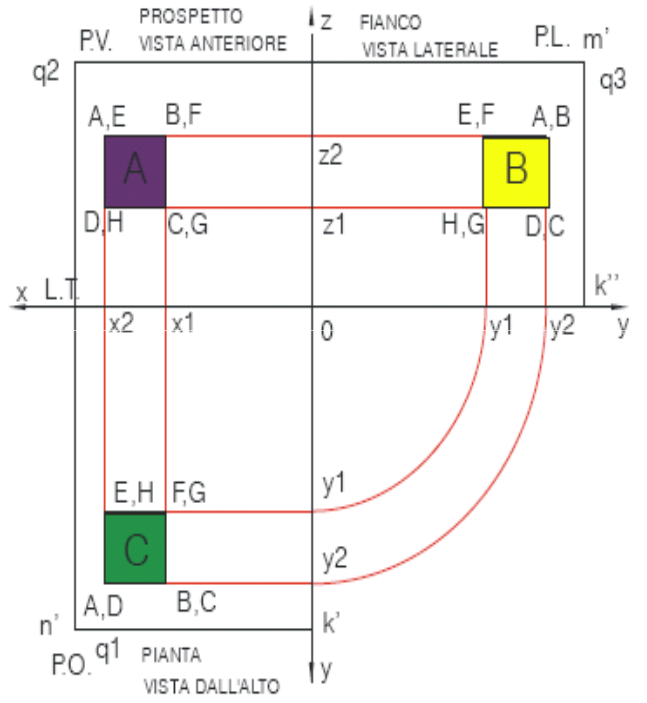
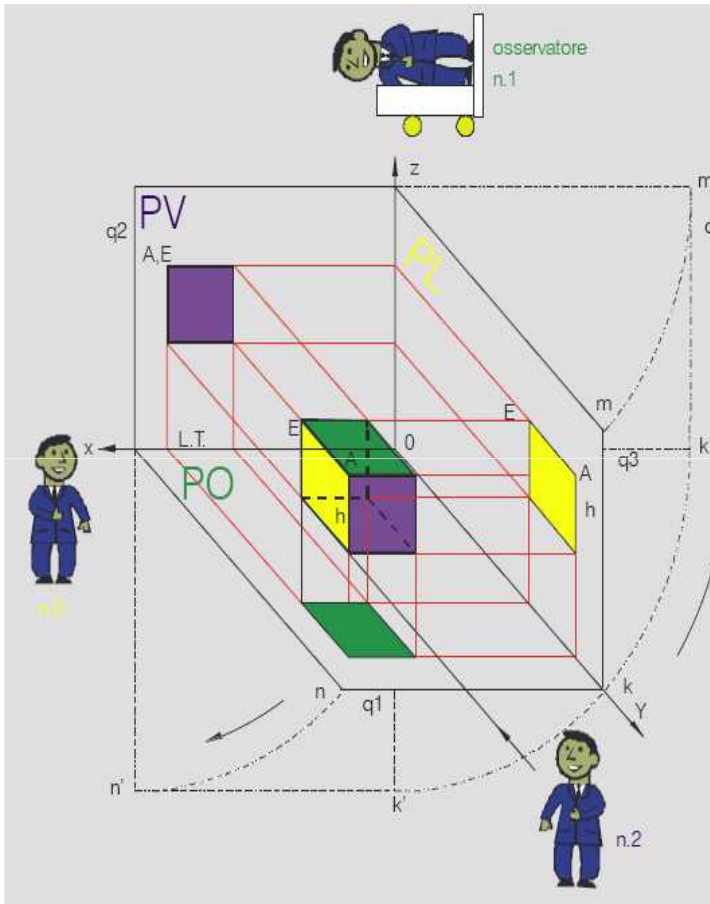


La proiezione ortogonale di un punto **P** nello spazio tridimensionale



Proiezione ortogonale di un segmento di retta





Glossario

Rette parallele: due rette nello spazio si dicono **parallele** se sono coincidenti oppure se sono complanari e non hanno punti di intersezione. Due rette si dicono **incidenti** se hanno un solo punto in comune

Rette perpendicolari o ortogonali: due rette incidenti si dicono perpendicolari se l'angolo α tra di loro è pari a 90° .

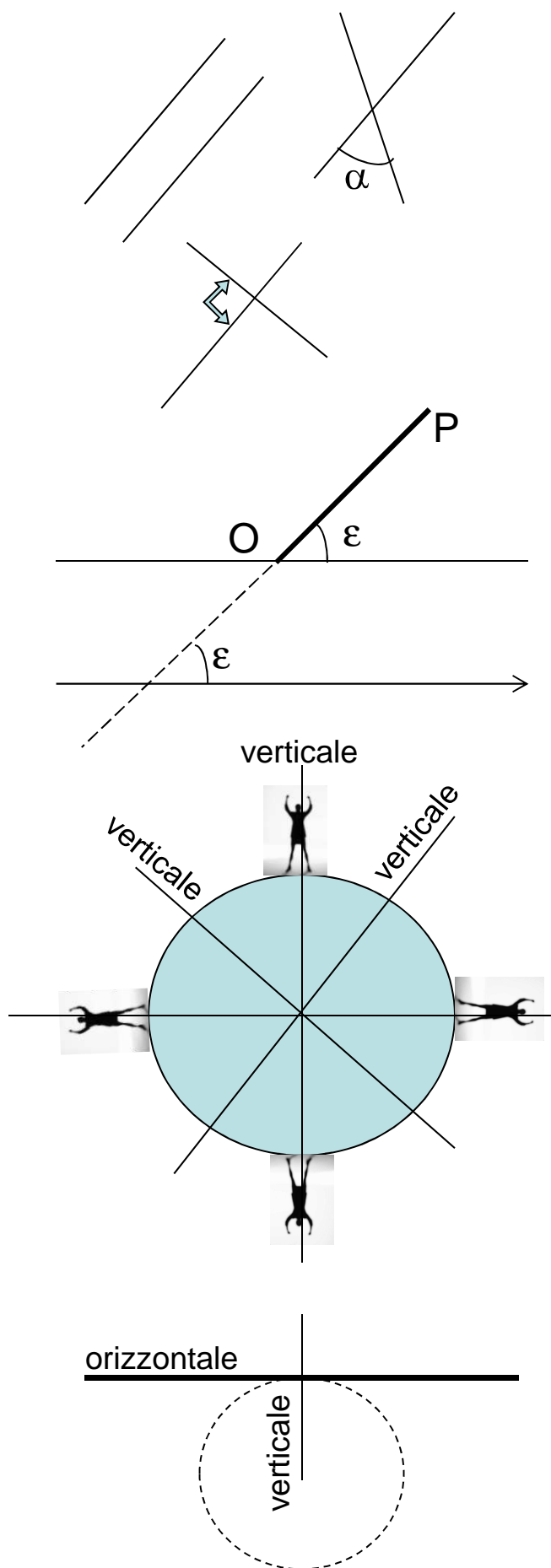
Angolo tra una retta a e un segmento:

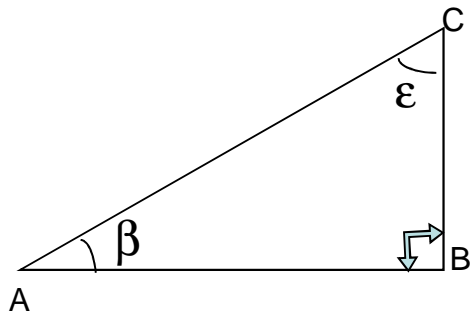
è pari all'angolo formato dalla retta a con la retta su cui giace il segmento oppure tra il segmento e la parallela alla retta a passante per un estremo del segmento

Direzione: ogni retta individua una direzione che può essere percorsa in due versi opposti

Direzione verticale in un punto P: è la direzione del filo a piombo nel punto P cioè la retta che congiunge il punto P con il centro della terra

Direzione orizzontale: è la direzione perpendicolare (ortogonale) a quella verticale





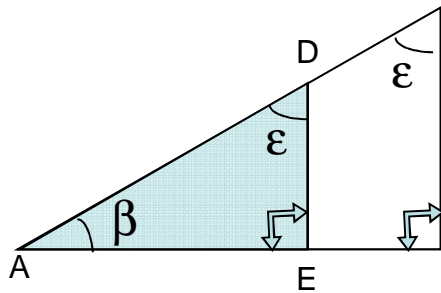
Glossario

Triangolo rettangolo: è un triangolo in cui uno angoli interni è pari a 90° e la somma degli altri 2 angoli interni è 90° .

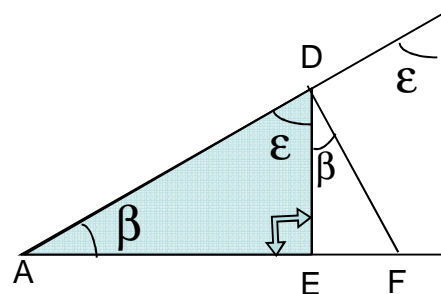
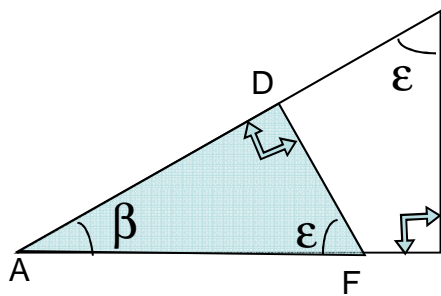
In particolare si ha:

$$\text{sen } \beta = \cos(90^\circ - \beta) = \cos \epsilon$$

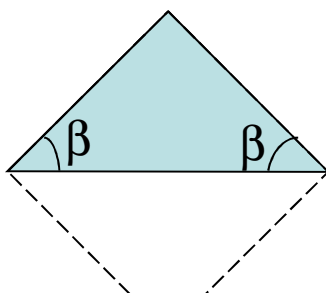
$$\cos \beta = \text{sen}(90^\circ - \beta) = \text{sen } \epsilon$$



Triangoli simili: due triangoli sono simili se hanno angoli interni uguali.



Triangolo equilatero: triangolo in cui tutti i lati sono uguali tra loro. Conseguentemente anche gli angoli interni sono uguali e pari a 60°



Triangolo isoscele: triangolo in cui tutti due lati sono uguali. Conseguentemente anche due angoli sono uguali tra loro.

Esercizi

- Dato un segmento di 2 m che forma un angolo di 30° con la direzione orizzontale. Determinare la sua componente lungo gli assi cartesiani.
- Dato un segmento verticale, determinare le sue componenti parallela e perpendicolare ad un piano inclinato di un angolo $\alpha=40^\circ$ sull'orizzontale
- Dato un segmento verticale, determinare le sue componenti parallela e perpendicolare ad un piano inclinato di un angolo $\alpha=30^\circ$ sulla verticale
- Se le componenti di un segmento OP sono rispettivamente $OP_x=3$ m e $OP_y=4$ m. Determinare la lunghezza di OP e la sua direzione (cioè gli angoli che la retta su cui agisce OP forma rispetto alle direzioni orizzontale e verticale)